Meccanica Razionale - 02.07.2019

Cognome e Nome ....

C. d. L.: .... Anno di Corso: 2 3 altro

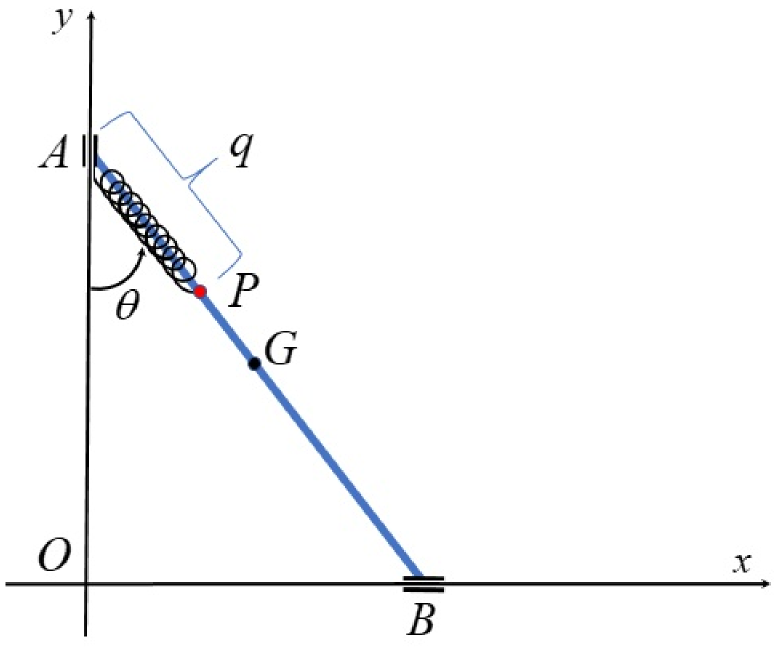
Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni; in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello) e firmare.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato **dopo** ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, telefoni cellulari.
5. CONSEGNARE **questo foglio e tutti i fogli di protocollo**.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

Quesito	1	2	3	4	5	6	7	8	9	TOT
Punti										

Nel piano verticale Oxy si consideri un sistema materiale pesante costituito da un'asta omogenea AB, di massa m e lunghezza 2ℓ, avente gli estremi A e B vincolati a scorrere sugli assi y ed x, ed un punto P, di massa m, scorrevole sull'asta. Oltre alle forze peso, sul sistema agisce una molla ideale di costante elastica $k = \frac{mg}{\ell}$, che collega P con A, ed una forza costante $\vec{F} = \frac{5}{4}mg\hat{\jmath}_2$, agente sul punto A dell'asta, dove $\hat{\jmath}_2$ è il versore dell'asse delle y. Supposti i vincoli lisci ed introdotti i parametri lagrangiani $\theta = y^{-}\hat{A}B$ e $q = (P - A)\cdot\text{vers}(B - A)$ come in figura, si chiede:



1. Determinare le coordinate dei punti A, B, P e G (G è il baricentro dell'asta) e l'espressione delle forze attive in funzione dei parametri lagrangiani. [PUNTI 2]

$A{-}O = 2\ell(0,\cos(\theta))$; $B{-}O = 2\ell(\sin(\theta),0)$; $G{-}O = \ell(\sin(\theta),\cos(\theta))$; $P{-}O = (q\sin(\theta),(2\ell{-}q)\cos(\theta))$; $\vec{F}_{k,P} = -k(q\sin(\theta),-q\cos(\theta))$; $\vec{F}_{k,A} = -\vec{F}_{k,P}$; $\vec{F}_A = (0,5/4mg)$; $\vec{F}_P = (0,-mg)$; $\vec{F}_G = (0,-mg)$.

2. Determinare la funzione potenziale U di tutte le forze attive agenti sul sistema. [PUNTI 4]

$U = -\frac{1}{2}mg\ell\cos(\theta) + mgq\cos(\theta) - \frac{1}{2}kq^2 + cost.$

3. Determinare le configurazioni di equilibrio ordinarie del sistema. [PUNTI 4]

$(\theta_1,q_1) = (0,\ell)$; $(\theta_2,q_2) = (\pi/3,\ell/2)$, $(\theta_3,q_3) = (-\pi/3,\ell/2)$.

4. Determinare le reazioni vincolari esterne nelle configurazioni di equilibrio ordinarie. [PUNTI 4]

$\vec{\phi}_A = \vec{0}$, $\vec{\phi}_B = (0,\frac{3}{4}mg)$.

5. Scrivere l'energia cinetica del sistema. [PUNTI 4]

$T = \frac{m}{2}\left(\dot{q}^2 + \dot{\theta}^2\left(q^2 + 4\ell(\ell-q)\sin(\theta)^2 + 4/3\ell^2\right) + 4\ell\dot{q}\dot{\theta}\sin(\theta)\cos(\theta)\right)$

6. Calcolare il momento della quantità di moto dell'asta rispetto al polo O. [PUNTI 4]

$\vec{K}_O = -\frac{2}{3}m\ell^2\dot{\theta}\hat{\imath}_3$

7. Determinare la quantità di moto del sistema. [PUNTI 4]

$\vec{Q} = m\dot{q}\left(\sin(\theta),-\cos(\theta)\right) + m\dot{\theta}\left((q+\ell)\cos(\theta),(q-3\ell)\sin(\theta)\right)$

8. Determinare un integrale primo del moto. [PUNTI 2]

$E = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{q}^2 + \dot{\theta}^2\left(q^2 + 4\ell(\ell-q)\sin(\theta)^2 + 4/3\ell^2\right) + 4\ell\dot{q}\dot{\theta}\sin(\theta)\cos(\theta)\right) + \frac{1}{2}mg\ell\cos(\theta) - mgq\cos(\theta) + \frac{1}{2}kq^2$

9. Scrivere la funzione lagrangiana e trovare le equazioni differenziali del moto. [PUNTI 4]

$\mathcal{L} = T + U$,
$\ddot{\theta}\left(q^2 + 4\ell(\ell - q)\sin(\theta)^2 + 4/3\ell^2\right) + 2\dot{\theta}\dot{q}(q - 2\ell\sin(\theta)^2) + 4\ell(\ell - q)\dot{\theta}^2\sin(\theta)\cos(\theta) + 2\ell\ddot{q}\sin(\theta)\cos(\theta) +$
$-\frac{1}{2}g\ell\sin(\theta) + gq\sin(\theta) = 0$,
$\ddot{q} + 2\ell\ddot{\theta}\sin(\theta)\cos(\theta) + 2\ell\dot{\theta}^2\cos(\theta)^2 - q\dot{\theta}^2 + g\left(q/\ell - \cos(\theta)\right) = 0.$